TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 355, Number 4, Pages 1699–1711
S 0002-9947(02)03209-9
Article electronically published on November 20, 2002

# COUPLES CONTACTO-SYMPLECTIQUES

GIANLUCA BANDE

Abstract. We introduce a new geometric structure on differentiable manifolds. A *contact-symplectic pair* on a manifold $M$ is a pair $(\alpha, \eta)$ where $\alpha$ is a Pfaffian form of constant class $2k+1$ and $\eta$ a 2-form of constant class $2h$ such that $\alpha \wedge d\alpha^k \wedge \eta^h$ is a volume form. Each form has a characteristic foliation whose leaves are symplectic and contact manifolds respectively. These foliations are transverse and complementary. Some other differential objects are associated to it. We give a local model and several existence theorems on nilpotent Lie groups, nilmanifolds and principal torus bundles. As a deep application of this theory, we give a negative answer to the famous Reeb's problem which asks if every vector field without closed 1-codimensional transversal on a manifold having contact forms is the Reeb vector field of a contact form.

## Introduction

Ce travail a pour objectif d'introduire une nouvelle structure géométrique appelée *Couple contacto-symplectique,* et de s'en servir pour donner une réponse négative à une question posée en 1952 par Georges Reeb ([15]):

*Dans une variété de contact $(X, \omega)$, le champ de vecteurs "de Reeb" de $\omega$ est sans singularités et sans transversale fermée de codimension 1. Un champ de vecteurs sur une variété (sur laquelle il existe des formes de contact) vérifiant ces deux propriétés est-il le champ de Reeb d'une forme de contact?*

La première partie concerne l'étude de certaines formes différentielles de classe constante au sens d'Elie Cartan ([4], [5]). Les problèmes globaux qui lui sont liés ont été peu abordés, sauf pour la classe constante maximale: formes de contact, formes symplectiques et formes de contact généralisé ([1]). Plus précisément, on appelle *couple contacto-symplectique (CCS)* de type $(h,k)$ sur une variété $M$ de dimension $2h+2k+1$, un couple $(\alpha, \eta)$ où $\alpha$ est une forme de Pfaff et $\eta$ une 2-forme sur $M$ telles que:

$$\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k \text{ est une forme volume sur } M$$
$$d\eta = 0, \quad d\alpha^{h+1} = 0, \quad \eta^{k+1} = 0.$$

Les formes $\alpha$ et $\eta$ sont alors nécessairement de classes constantes $2h+1$ et $2k$. Pour $k=0$, on retrouve les formes de contact, et pour $h=0$ les structures cosymplectiques ([12]). C'est pourquoi, pour les problèmes d'existence, on s'intéressera plus particulièrement aux cas $h \geq 1$ et $k \geq 1$.

---

Received by the editors May 3, 2002 and, in revised form, September 26, 2002.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53D10, Secondary 57R17.
*Key words and phrases.* Contact-Symplectic Pair, Reeb field, foliations, contact geometry, symplectic geometry.

À un tel couple sont naturellement associés divers objets différentiels. Les feuilletages caractéristiques $\mathcal{F}$ (de $\alpha$) et $\mathcal{G}$ (de $\eta$) sont transverses et supplémentaires. Les feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) sont munies de la forme symplectique induite par $\eta$ (resp. de contact induite par $\alpha$). Des notions plus générales de champ de Reeb, courbes de Legendre et crochets de Lie et de Poisson apparaissent. Nous verrons que les couples contacto-symplectiques d'un même type $(h,k)$ admettent un modèle local, comme pour les formes de contact et les formes symplectiques.

Ce foisonnement de structures entremêlées pose avec acuité la question de l'existence de couples contacto-symplectiques. On donne des théorèmes d' existence sur des groupes de Lie nilpotents, sur des nilvariétés ainsi que sur les fibrés principaux en tores $\left(M^5, B_2, T^3\right)$, qui ont montré leur fécondité en géométrie de contact et symplectique (cf. [13], [14], [8], [9], [1]). Sur de tels fibrés où les variétés $M^5$ et $B_2$ sont supposées fermées, orientables de dimensions 5 et 2, on construit des couples contacto-symplectiques $T^3$-invariants de types $(1,1)$.

La dernière partie de cet article est consacrée au problème de Reeb. On montre le théorème suivant qui concerne les champs de Reeb des couples contacto-symplectiques:

*Soient $p$, $h$ deux entiers tels que $p \geq 2$ et $1 \leq h \leq p$, $\left(M^{2p+1}, B_{2p}, S^1\right)$ un fibré principal en cercles d'espace total et de base fermés, connexes, orientables, muni d'un couple contacto-symplectique $S^1$-invariant $(\alpha,\ \eta)$ de type $(h, p-h)$. Si le champ de Reeb $X$ du couple est le champ qui engendre l'action de $S^1$* du fibré*, alors $X$ n'est le champ de Reeb d'aucun couple contacto-symplectique de type $(h', p-h')$ différent de $(h, p-h)$.*

Sous ces mêmes hypothèses avec $h < p$, le champ $X$ étant le champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique est sans singularité et sans transversale fermée (i.e., compacte sans bord). Il n'est donc le champ de Reeb d'aucune forme de contact sur $M^{2p+1}$ puisqu'une forme de contact correspond à un couple de type $(p,0)$ qui est différent de $(h, p-h)$. Il existe bien entendu des exemples d'un tel fibré (portant des formes de contact); ce qui répond par la négative au problème de Reeb.

Une structure parente, celle de *couple de contact,* est développée dans [2] et [3].

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposée $C^\infty$.

Je tiens à remercier M. Goze, A. Hadjar et R. Lutz pour leurs remarques et suggestions qui ont été très précieuses, N. A'Campo et Y. Eliashberg pour l'interêt qu'ils ont porté à ce travail.

## 1. Couples contacto-symplectiques (CCS)

Soient $M$ une variété de dimension $2k+2h+1$, $\alpha$ et $\eta$ respectivement une 1-forme et une 2-forme sur $M$.

**Définition 1.1.** Le couple $(\alpha,\ \eta)$ est dit *contacto-symplectique* (en abrégé CCS) de type $(h,k)$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k \text{ est une forme volume sur } M,$$

$$d\eta = 0, \quad d\alpha^{h+1} = 0, \quad \eta^{k+1} = 0.$$

Les formes $\alpha$ et $\eta$ sont alors de classes constantes respectivement égales à $2h+1$ et $2k$. Il est évident que *l'existence d'un tel couple implique que $M$ est orientable.*

Par convention, pour $k = 0$ une telle structure est réduite à la donnée d'une forme de contact. Si $k \geq 1$ et $h = 0$, on retrouve les structures cosymplectiques ([12]). Dans la suite, on supposera donc toujours $k \geq 1$, $h \geq 1$.

L'exemple le plus simple de couple de contact est le suivant:

**CCS "de Darboux":** Si $y_1,\cdots,\ y_{2h},\ z,\ x_1,\cdots,\ x_{2k}$ sont les fonctions coordonnées sur $R^{2h+2k+1}$, les formes

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^{h} y_{2i-1} dy_{2i} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^{k} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$$

déterminent un couple contacto-symplectique de type $(h,k)$ sur $R^{2h+2k+1}$.

Cet exemple représente le modèle local des CCS de type $(h,k)$ (voir §2).

1.1. **Feuilletage caractéristique de $\alpha$ et de $\eta$.** Soit $(\alpha,\, \eta)$ un CCS de type $(h,k)$ sur $M$. À une telle structure sont naturellement associées deux distributions: celle des vecteurs qui annulent à la fois $\alpha$ et $d\alpha$, et celle des vecteurs qui annulent $\eta$. Ces distributions sont complètement intégrables car les formes $\alpha$ et $\eta$ sont de classes constantes $2h+1$ et $2k$. Elles déterminent les feuilletages caractéristiques de $\alpha$ et $\eta$, qu'on notera $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Le *feuilletage caractéristique de* $\eta$ est de codimension $2k$ et ses feuilles sont des variétés de contact car $\alpha$ induit une forme de contact sur chacune d'elles. Le *feuilletage caractéristique de* $\alpha$ est de codimension $2h+1$ et ses feuilles sont des variétés symplectiques car $\eta$ y induit une forme symplectique. Ce qui a motivé le choix du vocable "contacto-symplectique".

Les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont évidemment transverses et supplémentaires.

1.2. **Champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique.** Ce paragraphe concerne une généralisation naturelle du champ de Reeb classiquement associé aux formes de contact.

**Théorème 1.2.** *Soit* $(\alpha,\, \eta)$ *un CCS de type* $(h,k)$ *sur* $M^{2h+2k+1}$. *Alors il existe un unique champ de vecteurs* $Z$ *sur* $M$ *tel que:*

$$\alpha\,(Z) = 1 \quad \textit{et} \quad i\,(Z)\left(d\alpha^h \wedge \eta^k\right) = 0.$$

Le champ de Reeb du CCS de Darboux est $\partial/\partial z$. Pour $k=0$, on retrouve le champ de Reeb d'une forme de contact au sens classique.

*Preuve.* Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux champs $Z$, $Y$ vérifiant

$$\alpha\,(Z) = \alpha\,(Y) = 1 \quad \text{et} \quad i\,(Z)\left(d\alpha^h \wedge \eta^k\right) = i\,(Y)\left(d\alpha^h \wedge \eta^k\right) = 0.$$

Le champ $Z - Y$ annule à la fois $\alpha$ et $d\alpha^h \wedge \eta^k$ et donc la forme volume $\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$, ce qui implique $Z = Y$.

Pour l'existence, considérons $\Omega = d\alpha^h \wedge \eta^k$. La dimension de son espace caractéristique est égale à 1 en tout point, car il s'agit d'une $(2k+2h)$-forme sans singularités sur une variété de dimension $2k+2h+1$. Soit $u_p \neq 0$ un vecteur tangent en un point $p$ tel que $i\,(u_p)\,\Omega_p = 0$. En posant $Z_p = u_p/\alpha_p\,(u_p)$, on vérifie facilement que le champ de vecteurs $Z$ ainsi construit est bien défini et vérifie $\alpha\,(Z) = 1$ et $i\,(Z)\left(d\alpha^h \wedge \eta^k\right) = 0$. □

Par un simple calcul, on démontre la proposition suivante, qui exprime une propriété remarquable du champ de Reeb des CCS.

**Proposition 1.3.** *Le champ de Reeb* $Z$ *vérifie les conditions suivantes:*

$$\alpha\,(Z) = 1,\ i\,(Z)\,d\alpha = 0,\ i\,(Z)\,\eta = 0.$$

Il est donc tangent au feuilletage caractéristique de $\eta$ et il est sur chaque feuille de ce feuilletage le champ de Reeb (au sens classique) de la forme de contact induite par $\alpha$ sur cette feuille.

**Corollaire 1.4.** *Un couple contacto-symplectique est invariant par le flot de son champ de Reeb.*

Le théorème suivant montre que le champ de Reeb d'un CCS a des propriétés similaires à celles du champ de Reeb d'une forme de contact (cf. [15]):

**Théorème 1.5.** *Le champ de Reeb $Z$ d'un couple contacto-symplectique $(\alpha,\ \eta)$ de type $(h,k)$ sur $M^{2h+2k+1}$ n'admet pas de transversale fermée (i.e., compacte sans bord) de codimension 1.*

*Preuve.* Puisque $h \geq 1$, on peut écrire $d\alpha^h \wedge \eta^k = d\left(\alpha \wedge d\alpha^{h-1} \wedge \eta^k\right)$. S'il existait une sous-variété $F$ fermée, de codimension 1 et partout transverse au champ $Z$, la forme $d\alpha^h \wedge \eta^k = i\,(Z)\,\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$ serait une forme volume exacte sur $F$, ce qui contredirait la formule de Stokes. $\square$

*D'après* [5]*, les formes $d\alpha$ et $\eta$ sont des invariants intégraux absolus pour le champ de Reeb $Z$ (i.e., $i_Z(d\alpha) = 0$, $L_Z(d\alpha) = 0$ et $i_Z(\eta) = 0$, $L_Z(\eta) = 0$) tandis que la forme $\alpha$ est un invariant intégral relatif (i.e., $i_Z(d\alpha) = 0$).*

### 1.3. Exemples de CCS.

(1) Soient $\left(M_1^{2h+1},\ \alpha\right)$ et $\left(M_2^{2k},\ \eta\right)$ une variété de contact et une variété symplectique respectivement. Le couple $(\alpha,\ \eta)$ est alors un CCS de type $(h,k)$ sur $M_1^{2h+1} \times M_2^{2k}$ qui sera appelé "*CCS produit*".

Sur le tore $T^5$, si $\theta_1$,$\theta_2$,$\theta_3$,$\phi_1$,$\phi_2$ désignent les 5 coordonnées de $R^5$, le couple $(\alpha,\eta)$ où $\alpha = \sin\phi_1 d\theta_1 - \cos\phi_1 d\theta_2$ et $\eta = d\phi_2 \wedge d\theta_3$ est un CCS produit dont le champ de Reeb est $Z = \sin\phi_1 \partial/\partial\theta_1 - \cos\phi_1 \partial/\partial\theta_2$.

(2) Soient $\left(M_2^{2h},\ \eta\right)$ une variété symplectique et $\left(M_1^{2k+2n+1}, (\alpha,\beta)\right)$ une variété munie d'un CCS de type $(k,n)$. Le couple $(\alpha,\beta+\eta)$ est alors un CCS de type $(k,n+h)$ sur la variété $M_1^{2k+2n+1} \times M_2^{2h}$.

## 2. Modèle local des CCS

Pour construire un modèle local des CCS, on utilise l'existence des deux feuilletages supplémentaires décrits ci-dessus. On montre aisément le théorème suivant ([2]):

**Théorème 2.1.** *Soit $(\alpha,\ \eta)$ un couple contacto-symplectique de type $(h,k)$ sur une variété $M$. En tout point $p$ de $M$, il existe un voisinage ouvert $V$ de $p$ et un système de coordonnées sur $V$ tels que le couple $(\alpha,\ \eta)$ sur $V$ s'écrive*

$$\alpha_V = dx_{2h+1} + \sum_{i=1}^{h} x_{2i-1} dx_{2i}, \quad \eta_V = \sum_{i=1}^{k} dy_{2i-1} \wedge dy_{2i}.$$

L'ouvert $V$ sera appelé *ouvert de Darboux.* Tout CCS est localement un CCS produit. Le champ de Reeb du modèle local est $\partial/\partial x_{2h+1}$.

## 3. Autres objets différentiels associés à un CCS

Soit $(\alpha,\ \eta)$ un CCS de type $(h,k)$ sur une variété $M$, $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) le feuilletage caractéristique de $\alpha$ (resp. $\eta$). À une telle structure sont naturellement associées les objets suivants:

3.1. **Feuilletage caractéristique de $d\alpha$.** La distribution des vecteurs qui annulent $d\alpha$ est aussi intégrable car $d\alpha$ est de classe constante $2h$. Elle détermine le *feuilletage caractéristique de $d\alpha$*, qui est de codimension $2h$.

Il est clair que sur chaque feuille du feuilletage caractéristique de $d\alpha$ la forme $\alpha \wedge \eta^k$ est une forme volume et donc le couple $(\alpha, \eta)$ restreint à chaque feuille détermine une structure cosymplectique. De plus, ces feuilles sont réunions de feuilles de $\mathcal{F}$.

Ce feuilletage a la propriété remarquable suivante:

**Proposition 3.1.** *Si le feuilletage caractéristique de $d\alpha$ a une feuille fermée $F$, alors toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ contenues dans $F$ sont difféomorphes. De plus la feuille $F$ se fibre sur le cercle.*

*Preuve.* Il suffit de remarquer que $\alpha$ restreinte à $F$ est une forme de Pfaff fermée sans singularités et donc les feuilles de son feuilletage caractéristique sur $F$ sont difféomorphes. Mais les feuilles du feuilletage caractéristique de $\alpha$ sur $F$ sont exactement les feuilles de $\mathcal{F}$ contenues dans $F$. L'existence d'une telle forme de Pfaff sur $F$ qui est fermée implique que $F$ se fibre sur le cercle ([16]). $\square$

3.2. **Crochets de Lie et de Poisson d'un CCS.** En utilisant la forme de contact induite par $\alpha$ sur chaque feuille du feuilletage caractéristique de $\eta$, on peut munir une variété contacto-symplectique d'un crochet de Lie. Plus précisément, à toute fonction $f$ sur $M$, on peut associer un champ de vecteurs de la manière suivante:

Sur chaque feuille $G$ du feuilletage $\mathcal{G}$, il existe un unique champ de vecteurs $X$ tangent à la feuille et vérifiant les conditions (cf. [11], [12])

$$\alpha_G(X) = f_{|G} \quad \text{et} \quad L_X \alpha_G \wedge \alpha_G = 0,$$

où $\alpha_G$ désigne la forme induite par $\alpha$ sur la feuille $G$.

Le champ de vecteurs obtenu sur $M$ est bien défini, $C^\infty$ et sera noté $X_{f,\alpha}$.

On peut maintenant définir le crochet par rapport à $\alpha$ de la manière suivante:

**Définition 3.2.** On appelle crochet de $f, g \in C^\infty(M)$ par rapport à $\alpha$, la fonction

$$\{f, g\}_\alpha = \alpha\left([X_{f,\alpha}, X_{g,\alpha}]\right).$$

On vérifie facilement les propriétés usuelles du crochet de Lie.

D'une manière similaire on construit un crochet de Poisson $\{f, g\}_\eta$ sur les feuilles symplectiques du feuilletage caractéristique de $\alpha$.

3.3. **Courbes de Legendre.** Elles sont définies ainsi:

**Définition 3.3.** Une courbe de Legendre du CCS $(\alpha, \eta)$ est une courbe $\gamma$ dans $M$, dérivable par morceaux et telle que

$$\alpha\left(\dot{\gamma}\right) = 0 \quad \text{et} \quad i\left(\dot{\gamma}\right)\eta \neq 0.$$

Ainsi la courbe doit être tangente au noyau de $\alpha$, mais transverse au feuilles de contact. Ces courbes permettent de relier les points comme dans le cas des structures de contact:

**Proposition 3.4.** *Deux points quelconques d'une variété connexe $M^{2h+2k+1}$ munie d'un CCS $(\alpha, \eta)$ de type $(h, k)$, peuvent être joints par une courbe de Legendre.*

*Preuve.* Par connexité, il suffit de montrer que l'on peut relier deux points quelconques d'un ouvert de Darboux par une telle courbe. En effet, soient $(x_1^0, \ldots, x_{2h}^0, z^0, y_1^0, \ldots, y_{2k}^0)$ et $\left(x_1^1, \ldots, x_{2h}^1, z^1, y_1^1, \ldots, y_{2k}^1\right)$ deux points de $R^{2h+2k+1}$ muni du CCS,

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^{h} x_{2i-1} dx_{2i} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^{k} dy_{2i-1} \wedge dy_{2i}.$$

Si $\left(y_1^0, \ldots, y_{2k}^0\right) \neq \left(y_1^1, \ldots, y_{2k}^1\right)$, il suffit de considérer la courbe

$$\gamma(t) = \left(\xi(t), \left(y_1^0, \ldots, y_{2k}^0\right) + t\left(y_1^1 - y_1^0, \ldots, y_{2k}^1 - y_{2k}^0\right)\right),$$

où $\xi(t)$ est une courbe de Legendre pour la forme de contact induite par $\alpha$ sur $R^{2h+1}$ et reliant le point $\left(x_1^0, \ldots, x_{2h}^0, z^0\right)$ à $\left(x_1^1, \ldots, x_{2h}^1, z^1\right)$.

Si $\left(y_1^0, \ldots, y_{2k}^0\right) = \left(y_1^1, \ldots, y_{2k}^1\right)$, on relie chacun de ces deux points, comme précédemment, à un troisième point $\left(x_1^2, \ldots, x_{2h}^2, z^2, y_1^2, \ldots, y_{2k}^2\right)$ vérifiant bien entendu $\left(y_1^2, \ldots, y_{2k}^2\right) \neq \left(y_1^1, \ldots, y_{2k}^1\right)$ et $\left(y_1^2, \ldots, y_{2k}^2\right) \neq \left(y_1^0, \ldots, y_{2k}^0\right)$. □

3.4. **Presque structure de contact.** Rappelons qu'une presque structure de contact sur une variété de dimension $2n+1$ est la donnée d'un couple $(\omega, \Phi)$ où $\omega$ est une forme de Pfaff et $\Phi$ une 2-forme telles que $\omega \wedge \Phi^n$ soit une forme volume.

Si $(\alpha, \eta)$ est un CCS de type $(h, k)$ sur $M$, le couple $(\alpha, d\alpha + \eta)$ est une presque structure de contact sur $M$ car:

$$\alpha \wedge (d\alpha + \eta)^{h+k} = C_{h+k}^{h} \alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k \neq 0.$$

## 4. Quelques obstructions topologiques

Soit $(\alpha, \eta)$ un CCS de type $(h, k)$ sur une variété $M^{2h+2k+1}$, avec $h \geq 1$ et $k \geq 1$. D'après [7], comme il existe une presque structure de contact sur $M$, alors:

**Proposition 4.1.** *Le groupe structural du fibré tangent à $M^{2h+2k+1}$ est réduit à $\{1\} \times U(h+k)$, et sa 3ème classe de Stiefel-Whitney est nulle.*

**Proposition 4.2.** *Si $M$ est fermée, alors on a $H^{2h+1}(M, R) \neq 0$ et, pour tout $l \leq k$, $H^{2l}(M, R) \neq 0$.*

*Preuve.* L'une des conditions $H^{2k+1}(M, R) = 0$ ou $H^{2l}(N, R) = 0$ pour un certain $l \leq k$ impliquerait que la forme volume $\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$ est exacte, ce qui est impossible si $M$ est fermée. □

Notons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les feuilletages caractéristiques de $\alpha$ et $\eta$ respectivement. Alors:

**Proposition 4.3.** *Si $N$ est une feuille fermée de $\mathcal{F}$, alors $H^{2l}(N, R) \neq 0$ pour tout $l \leq k$.*

*Preuve.* Soit $N$ une feuille fermée de $\mathcal{F}$. La forme $\eta$ y induit une forme symplectique, d'où le résultat. □

Rappelons que sur toute sphère $S^{2h+1}$ il existe une forme de contact (i.e., un CCS de type $(h, 0)$). Par ailleurs, d'après la proposition 4.2,

**Corollaire 4.4.** *Aucune sphère ne porte un CCS de type $(h, k)$ avec $k \geq 1$.*

## 5. Exemples de groupes de Lie nilpotents et de nilvariétés munis d'un CCS

Les groupes de Lie nilpotents et les nilvariétés nous fournissent des exemples intéressants de CCS. On présente ci-dessous quelques exemples de construction en dimension 5 et 7 qui peuvent éventuellement s'étendre en dimension supérieure. Pour cela, on utilise une classification en dimensions 5 et 7 des algèbres de Lie nilpotentes ([6]).

5.1. **CCS sur les groupes de Lie.** Pour décrire l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, on écrira les crochets des champs fondamentaux. Les crochets non écrits sont sous entendus nuls. Les champs fondamentaux seront notés $X_i$ et leurs formes duales $\omega^i$.

**Exemple 5.1.** Considérons l'algèbre de Lie $n_5^6$ de dimension 5. Ses crochets non nuls sont les suivants:

$$[X_1, X_5] = X_4 \quad \text{et} \quad [X_1, X_3] = X_2.$$

Le couple $(\alpha, \eta)$, où $\eta = \omega^4 \wedge \omega^5$ et $\alpha = \omega^2$, induit un CCS invariant de type $(1,1)$ sur le groupe de Lie correspondant.

**Exemple 5.2.** Sur l'algèbre de Lie $n_7^{5,1}$ de dimension 7, dont les crochets non nuls sont

$$[X_5, X_7] = X_3, \quad [X_4, X_5] = X_2, \quad [X_5, X_6] = [X_6, X_7] = X_2,$$
$$[X_1, X_j] = X_{j-1} \quad \text{pour} \quad j = 3, 4, 5, 7,$$

les formes $\eta = \omega^6 \wedge \omega^7$ et $\alpha = \omega^2$ déterminent un CCS invariant de type $(2,1)$ sur le groupe de Lie correspondant.

**Exemple 5.3.** Soit $n_7^{84}$ l'algèbre de Lie de dimension 7, dont les crochets non nuls sont les suivants

$$[X_1, X_j] = X_{j-1} \text{ pour } j = 3, 4, 5, 7.$$

Les formes $\eta = \omega^4 \wedge \omega^5 + \omega^6 \wedge \omega^7$ et $\alpha = \omega^2$ déterminent un CCS invariant de type $(1,2)$ sur le groupe de Lie correspondant.

5.2. **CCS sur les nilvariétés.** Les algèbres de Lie ci-dessus sont toutes rationnelles. L'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant à chacune admet des *sous-groupes discrets cocompacts*. Les nilvariétés obtenues (quotient de ces groupes par ces sous-groupes) donnent des *exemples de variétés fermée* munies de CCS.

## 6. Théorèmes d'existence de CCS invariants sur les fibrés principaux $\left(M^5, B_2, T^3\right)$

Comme pour les formes de contact ([13], [14], [8], [9]) ainsi que les formes de contact généralisé ([1]), on restreint la recherche en utilisant l'invariance sur les fibrés en tores pour donner des théorèmes d'existence de CCS de type $(1,1)$, les autres cas en dimension 5 se réduisant aux formes de contact et aux structures cosymplectiques.

Considérons un fibré principal en tores $\left(M^5, B_2, T^3\right)$ d'espace total et base connexes, fermés, orientables, de projection $\pi$.

Soit $\theta = \sum_{i=1}^3 \theta^i \otimes e_i$ une forme de connexion de courbure $\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \otimes e_i$ et $X_1$, $X_2$, $X_3$ les champs de vecteurs fondamentaux engendrés par $e_1$, $e_2$, $e_3$.

Soient $\alpha$, $\eta$ une forme de Pfaff et une 2-forme sur $M^5$ respectivement. Elles sont invariantes si et seulement si elles s'écrivent de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi^*(\beta) + \pi^*(f_1)\,\theta^1 + \pi^*(f_2)\,\theta^2 + \pi^*(f_3)\,\theta^3,\\ \eta &= \pi^*(\gamma) + \pi^*(\varepsilon_1)\,\theta^1 + \pi^*(\varepsilon_2)\,\theta^2 + \pi^*(\varepsilon_3)\,\theta^2 + \pi^*(g_1)\,\theta^2\wedge\theta^3\\ &\quad + \pi^*(g_2)\,\theta^1\wedge\theta^3 + \pi^*(g_3)\,\theta^1\wedge\theta^2,\end{aligned}$$

où $\gamma$ est une 2-forme, $\beta$, $\varepsilon_i$, des formes de Pfaff et $f_i$, $g_i$ des fonctions sur $B_2$.

Le couple $(\alpha,\eta)$ est un CCS de type $(1,1)$ si et seulement si les quatre conditions suivantes (sur la base) sont vérifiées:

**Condition 6.1.**

$$\begin{aligned}&\beta\wedge(g_1 df_1 - g_2 df_2 + g_3 df_3) + (g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3)\left(d\beta + f_1\Omega^1 + f_2\Omega^2 + f_3\Omega^3\right)\\ &+ \varepsilon_1\wedge(f_2 df_3 - f_3 df_2) + \varepsilon_2\wedge(f_3 df_1 - f_1 df_3) + \varepsilon_3\wedge(f_1 df_2 - f_2 df_1) \neq 0 \quad \text{partout.}\end{aligned}$$

**Condition 6.2.**

$$df_1\wedge df_2 = df_1\wedge df_3 = df_2\wedge df_3 = 0.$$

**Condition 6.3.**

$$\begin{aligned}dg_1 = dg_2 = dg_3 = 0 \quad &(\text{les } g_i \text{ sont des constantes}),\\ d\varepsilon_1 - g_2\Omega^3 - g_3\Omega^2 &= 0,\\ d\varepsilon_2 - g_1\Omega^3 + g_3\Omega^1 &= 0,\\ d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 &= 0.\end{aligned}$$

**Condition 6.4.**

$$\begin{aligned}g_1\gamma - \varepsilon_2\wedge\varepsilon_3 = g_2\gamma - \varepsilon_1\wedge\varepsilon_3 = g_3\gamma - \varepsilon_1\wedge\varepsilon_2 = 0,\\ g_1\varepsilon_1 - g_2\varepsilon_2 + g_3\varepsilon_3 = 0.\end{aligned}$$

On appelle ensemble singulier du couple $(\alpha,\eta)$ l'ensemble des zéros de la fonction

$$(\alpha\wedge\eta)(X_1,X_2,X_3) = \pi^*(g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3),$$

c'est-à-dire $\pi^{-1}(\Sigma)$ où $\Sigma$ est l'ensemble sur lequel s'annule $h = g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3$.

Géométriquement, c'est l'ensemble des point $p$ de $M^5$ sur lesquels la forme induite par $\alpha\wedge\eta$ sur la fibre contenant $p$ n'est plus une forme volume.

6.1. **Nature de $\Sigma$.** Si $\Sigma$ n'est pas vide et ne coïncide pas avec la base, alors l'une au moins des constantes $g_i$ doit être non nulle. On suppose alors $g_2 \neq 0$ et à partir de la condition 6.4 on trouve: $f_2 = (g_1 f_1 + g_3 f_3 - h)/g_2$, $\varepsilon_2 = (g_1\varepsilon_1 + g_3\varepsilon_3)/g_2$. La condition 6.1 devient

$$\begin{aligned}g_2\beta\wedge dh + h\left(g_2 d\beta + g_2 f_1\Omega^1 + (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h)\,\Omega^2 + g_2 f_3\Omega^3\right)\\ -\varepsilon_1\wedge(h df_3 - f_3 dh) + \varepsilon_3\wedge(h df_1 - f_1 dh) \neq 0.\end{aligned}$$

Sur $\Sigma$, on aura $(g_2\beta - f_3\varepsilon_1 - f_1\varepsilon_3)_\Sigma \wedge dh_\Sigma \neq 0$.

Ceci implique que l'ensemble $\Sigma$ (si $\Sigma\neq\emptyset$ et $\Sigma\neq B_2$) est *une sous-variété fermée, orientable de codimension* 1, et donc une réunion finie de cercles.

La fonction $h$ change de signe quand on traverse $\Sigma$, et donc l'ensemble $\Sigma$ vérifie la propriété évidente suivante:

**Condition 6.5.** *Chaque composante connexe de $B_2 - \Sigma$ peut être munie d'un signe + ou - (le signe de la fonction $h$), de façon que deux composantes adjacentes aient des signes opposés.*

Pour l'ensemble singulier $S$ (de projection $\Sigma$ sur $B_2$) d'un CCS invariant on est nécessairement dans l'un des trois cas suivants:

(1) $\Sigma$ coïncide avec $B_2$,
(2) $\Sigma$ est vide,
(3) $\Sigma$ est une sous-variété régulière fermée, orientable de codimension 1 de $B_2$ vérifiant la condition 6.5.

On verra dans la suite que tous ces trois cas sont effectivement possibles.

6.2. **Théorèmes d'existence.** La donnée d'un ensemble $\Sigma$ vérifiant l'un de trois cas précédents, permet de construire des CCS invariants ayant $\pi^{-1}(\Sigma)$ comme ensemble singulier.

6.2.1. *Cas où* $\Sigma = B_2$. La base $B_2$ est nécessairement le tore $T^2$, comme le montre le théorème suivant:

**Théorème 6.6.** *Soit* $\left(M^5, B_2, T^3\right)$ *un fibré principal d'espace total et base connexes, fermés, orientables. Il existe un CCS invariant* $(\alpha,\eta)$ *de type* $(1,1)$ *dont l'ensemble singulier coïncide avec* $B_2$*, si et seulement si* $B_2$ *est le tore* $T^2$*.*

*Preuve.* Il s'agit d'avoir des $f_i$ et $\varepsilon_i$ vérifiant les cinq conditions 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 et $h \equiv 0$. On a nécessairement $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, et les conditions deviennent:

(1) $\varepsilon_1 \wedge (f_2 df_3 - f_3 df_2) + \varepsilon_2 \wedge (f_3 df_1 - f_1 df_3) + \varepsilon_3 \wedge (f_1 df_2 - f_2 df_1) \neq 0$,
(2) $df_1 \wedge df_2 = df_1 \wedge df_3 = df_2 \wedge df_3 = 0$,
(3) $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = 0$,
(4) $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = 0$.

Puisque la première condition implique que les formes $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ et $\varepsilon_3$ ne peuvent pas s'annuler simultanément, et la quatrième condition implique qu'elles sont colinéaires, l'intersection de leurs noyaux est de dimension 1. Ce noyau détermine sur $B_2$ un champ de directions, et donc un feuilletage de dimension 1. Mais l'existence d'un tel feuilletage, $B_2$ étant connexe et fermée, implique que $B_2$ est un tore.

Réciproquement, si la base du fibré est un tore, on choisit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = d\theta^1$, $f_1 = \sin\theta^2$, $f_2 = \cos\theta^2$ et $f_3 = 0$. □

6.2.2. *Cas où* $\Sigma$ *est vide.* On a une contrainte sur le fibré:

**Théorème 6.7.** *Soit* $\left(M^5, B_2, T^3\right)$ *un fibré principal d'espace total et base connexes, fermés, orientables. Il existe un CCS invariant* $(\alpha,\eta)$ *de type* $(1,1)$ *d'ensemble singulier vide si et seulement si les classes caractéristiques du fibré ne sont pas toutes nulles.*

Il n'y a donc pas de telles CCS sur des fibrés triviaux $B_2 \times T^3$.

*Preuve.* Supposons d'abord qu'il existe un couple contacto-symplectique invariant $(\alpha,\eta)$ de type $(1,1)$ dont l'ensemble singulier soit vide. Dans ce cas, au moins l'une des constantes $g_1$, $g_2$, $g_3$ est non nulle. Si $g_2 \neq 0$, on aura

$$f_2 = (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h)/g_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (g_1\varepsilon_1 + g_3\varepsilon_3)/g_2.$$

La condition 6.1 peut donc s'écrire ainsi:

$$\begin{gathered} g_2 h^2 d(\beta/h) + h\left(g_2 f_1 \Omega^1 + (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h)\,\Omega^2 + g_2 f_3 \Omega^3\right) \\ -\varepsilon_1 \wedge (h df_3 - f_3 dh) + \varepsilon_3 \wedge (h df_1 - f_1 dh) \neq 0 \ \text{ partout}, \end{gathered}$$

or

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \wedge (hdf_3 - f_3 dh) &= -h^2 d\left(\frac{f_3}{h}\varepsilon_1\right) + hf_3 d\varepsilon_1,\\ \varepsilon_3 \wedge (hdf_1 - f_1 dh) &= -h^2 d\left(\frac{f_1}{h}\varepsilon_1\right) + hf_1 d\varepsilon_3.\end{aligned}$$

De la condition 6.3 on obtient

$$g\left[d\left(\frac{\beta}{h}\right) - d\left(\frac{f_3}{h}\varepsilon_1\right) - d\left(\frac{f_1}{h}\varepsilon_1\right)\right] + \Omega^2 \neq 0.$$

Ainsi $\int \Omega^2 \neq 0$, d'où $\left[\Omega^2\right] \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'au moins l'une des classes caractéristiques est non nulle (celle de $\Omega^1$ par exemple). Considérons les formes

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi^*(\beta) + \pi^*(g_1)\,\theta^1 + \pi^*(-g_2)\,\theta^2 + \pi^*(g_3)\,\theta^3,\\ \eta &= \pi^*(\varepsilon_1)\,\theta^1 + \pi^*(\varepsilon_2)\,\theta^2 + \pi^*(\varepsilon_3)\,\theta^2 + \pi^*(g_1)\,\theta^2\wedge\theta^3\\ &\quad + \pi^*(g_2)\,\theta^1\wedge\theta^3 + \pi^*(g_3)\,\theta^1\wedge\theta^2,\end{aligned}$$

où $g_i$ sont des constantes et $\beta$, $\varepsilon_i$ des formes de Pfaff sur $B_2$.

Alors $(\alpha,\eta)$ est un CCS si et seulement si on a

$$\begin{gathered}\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2\right)\cdot\left(d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2 + g_3\Omega^3\right) \neq 0,\\ d\varepsilon_1 - g_2\Omega^3 - g_3\Omega^2 = 0,\\ d\varepsilon_2 - g_1\Omega^3 + g_3\Omega^1 = 0,\\ d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0,\\ \varepsilon_2\wedge\varepsilon_3 = \varepsilon_1\wedge\varepsilon_3 = \varepsilon_1\wedge\varepsilon_2 = 0,\\ g_1\varepsilon_1 - g_2\varepsilon_2 + g_3\varepsilon_3 = 0.\end{gathered}$$

On peut supposer $\Omega^3 = 0$, quitte à faire le changement de connexion suivant:

$$\tilde\theta^1 = \theta^1,\ \tilde\theta^2 = \theta^2,\ \tilde\theta^3 = \pi^*(\nu) + \pi^*(a)\,\theta^1 + \theta^3,$$

où $a = -(\int\Omega^3)/\int\Omega^1$ et $\nu$ une primitive de la forme exacte $-\left(a\Omega^1+\Omega^3\right)$.

En posant $g_3 = 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ les conditions deviennent:

$$\begin{gathered}d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0,\\ \left(g_1^2+g_2^2\right)\cdot\left(d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2\right)\neq 0.\end{gathered}$$

Soit $l$ un réel non nul. Puisque $\int\Omega^1\neq 0$, il existe un unique couple $(g_1,g_2)\neq(0,0)$ de sorte que

$$g_1\int\Omega^2 + g_2\int\Omega^1 = 0 \quad \text{et} \quad g_1\int\Omega^1 - g_2\int\Omega^2 = l.$$

Soient $\varepsilon_3$ telle que $d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0$, et $\Phi$ une forme volume d'intégrale égale à 1. On a

$$\int l\Phi = \int\left(g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2\right).$$

Ceci implique l'existence d'un $\beta$ vérifiant $d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2 \neq 0$. □

6.2.3. *Cas où $\Sigma$ est une sous-variété de codimension* 1 *de* $B_2$. Dans ce cas il n'y a aucune contrainte sur le fibré et on a le

**Théorème 6.8.** *Soit $\left(M^5, B_2, T^3\right)$ un fibré principal en tores d'espace total et base connexes, fermés, orientables. Soit $\Sigma$ une sous-variété régulière fermée orientable de codimension* 1 *de $B_2$ vérifiant la propriété 6.5. Alors il existe sur $M^5$ un CCS invariant $(\alpha, \eta)$ de type $(1,1)$ dont l'ensemble singulier est $\pi^{-1}(\Sigma)$.*

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant ([2] et [13]).

**Lemme 6.9.** *Soit $B$ une variété fermée orientable de dimension* 2 *et $\Sigma$ une sous-variété régulière fermée, orientable de codimension* 1 *vérifiant la condition 6.5. Il existe alors une fonction $h$ et une forme de Pfaff $\beta$ telles que $\Sigma = h^{-1}(0)$ et la forme $h \cdot d\beta + \beta \wedge dh$ est une forme volume sur $B$.*

*Preuve.* **(du Théorème)** Il sera démontré en plusieurs étapes. Il s'agit de trouver $f_i$, $g_i$, $\varepsilon_i$, $\beta$, $\gamma$ de sorte que les conditions 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 soient satisfaites ainsi que $h^{-1}(0) = \Sigma$.

*Première étape:* D'après le lemme 6.9, il existe $\beta_0$ et $h$ tels que

$$h^{-1}(0) = \Sigma \quad \text{et} \quad \beta_0 \wedge dh + hd\beta_0 \neq 0.$$

*Deuxième étape:* On construit les fonctions $f_i$. On pose $f = h/\left(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2\right)$, $f_1 = g_1 f$ , $f_2 = -g_2 f$ et $f_3 = g_3 f$ , où les $g_i$ sont des constantes non toutes nulles. Ainsi la condition 6.2 sera satisfaite.

*Troisième étape:* Construisons les constantes $g_i$ et les formes $\gamma$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. Si les classes caractéristiques du fibré sont toutes nulles, posons $\Omega^i = d\xi^i$ et choisissons $g_3$ non nulle. Soient

$$\varepsilon_1 = g_2\xi^3 + g_3\xi^2, \quad \varepsilon_2 = g_1\xi^3 - g_3\xi^1,$$
$$\varepsilon_3 = \left(g_2\varepsilon_2 - g_1\varepsilon_1\right)/g_3 \quad \text{et} \quad \gamma = (1/g_3)\,\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2.$$

Les conditions 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 sont satisfaites. Si l'une des classes caractéristiques (celle $\Omega^1$ par exemple) n'est pas nulle, on peut supposer $\Omega^3 = 0$ via un changement de connexion comme au paragraphe précédent.

Les conditions 6.3 et 6.4 deviennent alors

$$d\varepsilon_1 - g_3\Omega^2 = 0, \quad d\varepsilon_2 + g_3\Omega^1 = 0, \quad d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0,$$
$$g_1\gamma - \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = g_2\gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = g_3\gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = 0,$$
$$g_1\varepsilon_1 - g_2\varepsilon_2 + g_3\varepsilon_3 = 0.$$

On pose

$$g_3 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{et} \quad g_2 = -g_1\left(\int \Omega^2\right)/\left(\int \Omega^1\right).$$

La dernière condition implique que les formes $g_1\Omega^2$ et $g_2\Omega^1$ sont cohomologues, d'où l'existence de $\varepsilon_3$ telle que $d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0$.

Pour terminer, on pose $\beta = r\beta_0$ où le réel $r$ est choisi suffisamment grand pour que la condition 6.1 soit satisfaite. $\square$

## 7. Problème de Reeb

Dans ce paragraphe on utilise la théorie des CCS pour répondre à un célèbre problème posé par G. Reeb ([15]):

*On sait que le champ de Reeb d'une forme de contact est sans singularité et n'admet pas de transversale fermée de codimension* 1*. Sur une variété, ayant des formes de contact, un champ de vecteur sans singularités et n'admettant pas de transversale fermée de codimension* 1 *est-il le champ de Reeb d'une forme de contact?*

Les théorèmes suivants donnent en particulier une réponse négative à cette question.

**Théorème 7.1.** *Soient $p \geq 2$, $1 \leq k \leq p$, $\left(M^{2p+1}, B_{2p}, S^1\right)$ un fibré principal en cercles d'espace total fermé, connexe, orientable et $(\alpha,\ \eta)$ un couple contacto-symplectique invariant de type $(k, p-k)$. Si le champ de Reeb du couple est le champ $X$ qui engendre l'action, alors $X$ n'est le champ de Reeb d'aucun couple contacto-symplectique de type différent de $(k, p-k)$.*

*Remarque* 7.2. Comme cas particulier, avec $k < p$, le champ $X$ n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact, puisqu'une forme de contact est un CCS de type $(p, 0)$.

*Preuve.* Soient $\pi$ la projection du fibré et $\theta$ une forme de connexion de courbure $\Omega$. Alors le couple va s'écrire de la manière suivante:

$$\alpha = \pi^* (\beta) + \pi^* (f) \, \theta \quad \text{et} \quad \eta = \pi^* (\mu) + \pi^* (\varepsilon) \wedge \theta$$

où $f$ est une fonction, $\beta$ et $\varepsilon$ des formes de Pfaff et $\mu$ une 2-forme sur $B_{2p}$. Puisque $X$ est le champ de Reeb du couple $(\alpha, \eta)$, on aura

$$\alpha (X) = \theta (X) = 1 \quad \text{et} \quad i (X) \, d\alpha = i (X) \, \eta = i (X) \, d\theta = 0$$

d'où $f = 1$ et $\varepsilon = 0$. Avec un changement de connexion on peut se ramener au cas où $\alpha \equiv \theta$. Puisque $(\alpha, \eta)$ est un CCS, on a les conditions suivantes sur la base:

$$\mu^{p-k+1} = 0, \quad d\mu = 0, \quad \Omega^{k+1} = 0, \quad \Omega^k \wedge \mu^{p-k} \neq 0.$$

Supposons maintenant par l'absurde que $X$ soit le champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique $(\gamma, \sigma)$ de type $(h, p-h)$, avec $h \neq k$. Le couple $(\gamma, \sigma)$ est invariant par le flot de son champ de Reeb $X$, donc invariant par l'action du fibré. Ceci implique qu'il est de la forme:

$$\gamma = \pi^* (\xi) + \theta \quad \text{et} \quad \sigma = \pi^* (\sigma_0) \, .$$

Or $(\gamma, \sigma)$ est un CCS de type $(h, p-h)$, d'où:

$$\begin{gathered} (d\xi + \Omega)^h \wedge (\sigma_0)^{p-h} \neq 0, \\ (d\xi + \Omega)^{h+1} = 0, \quad (\sigma_0)^{p-h+1} = 0 \quad \text{et} \quad d\sigma_0 = 0. \end{gathered}$$

*Premier cas:* Si $h \geq k+1$, la forme $(d\xi + \Omega)^h$ est exacte car $\Omega^h = 0$. Ainsi la forme $(d\xi + \Omega)^h \wedge (\sigma_0)^{p-h}$ serait exacte aussi car $\sigma_0$ est fermée. Ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'une forme volume sur la base qui est fermée.

*Deuxième cas:* Si $h \leq k-1$, la condition $(d\xi + \Omega)^{h+1} = 0$ impliquerait l'exactitude de $\Omega^{h+1}$. En utilisant $\Omega^k \wedge \mu^{p-k} \neq 0$, on aurait encore une contradiction. □

Une conséquence immédiate est le

**Théorème 7.3.** *Il existe une variété (munie d'une forme de contact) ayant un champ de vecteurs sans singularité, n'admettant aucune transversale fermée de codimension* 1 *et qui n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact.*

*Preuve.* Il suffit, par exemple, de considérer la fibration de Hopf de la sphère de dimension 3 sur celle de dimension 2 et d'ajouter un facteur $S^2$. On aura alors le fibré principal $\left(S^3 \times S^2, S^2 \times S^2, S^1\right)$. Soit $\alpha$ une forme de connexion et de contact sur le fibré de Hopf $\left(S^3, S^2, S^1\right)$; il en existe d'après [13] puisque la classe caractéristique du fibré est non nulle. Soit $\mu$ une forme volume sur $S^2$. Le couple $(\alpha, \mu)$ est un CCS invariant de type $(1,1)$ sur le fibré $\left(S^3 \times S^2, S^2 \times S^2, S^1\right)$, dont le champ de Reeb engendre l'action de $S^1$ du fibré. Il est donc sans singularités, sans transversale fermée et d'après la remarque 7.2, il n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact sur $S^3 \times S^2$.

Par ailleurs on sait bien que sur $S^3 \times S^2$ il existe des formes de contact car il peut être vu comme le fibré cotangent unitaire de $S^3$ . □

## Références


[1] Bande G., *On generalized contact forms*, Differential Geom. Appl., 11, 257-263, 1999. MR **2001g:**53135

[2] Bande G., *Formes de contact généralisé, couples de contact et couples contacto-symplectiques,* Thèse de Doctorat, Université de Haute Alsace, 2000.

[3] Bande G. et Hadjar A., *Couples de contact*, à paraître.

[4] Cartan E., *Les systèmes différentiels et leurs applications géométriques*, Hermann et Cie., Paris, 1945. MR **7:**520d

[5] Cartan E., *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1922.

[6] Goze M. and Khakimdjanov Y., Nilpotent Lie Algebras, Mathematics and its Applications 361, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1996. MR **97e:**17017

[7] Gray J.W., *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math., 69, 421-450, 1959. MR **22:**3016

[8] Hadjar A., *Sur un problème d'existence relatif de formes de contact invariantes en dimension trois*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 891-904, 1992.

[9] Hadjar A., *Sur les structure de contact régulières en dimension trois,* Trans. Amer. Math. Soc., 347, 2473-2480, 1995. MR **95k:**57030

[10] Kobayashi S., *Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group*, Tohoku Math. J., 8, 29-45, 1956. MR **18:**328a

[11] Libermann P. et Marle C.M., *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*, I, II, III, IV, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 1987. MR **88g:**58049a; MR **88g:**58049b; MR **88g:**58049c; MR **88g:**58049d

[12] Libermann P., *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*, Colloque Géom. Diff. Globale, Bruxelles, 37-59, 1959. MR **22:**9919

[13] Lutz R., *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles en dimension trois*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27, 1-15, 1977. MR **57:**17668

[14] Lutz R., *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 283-306, 1979. MR **82j:**53067

[15] Reeb G., *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques*, Acad. Roy. Belgique Cl. Sci. Mèm. Coll. in $8^0$, 27, 1952. MR **15:**336b

[16] Tischler D., *On fibering certain foliated manifolds over* $S^1$, Topology, 9, 153-154, 1970. MR **41:**1069



Università degli studi di Cagliari, Dip. Mat., Via Ospedale 72, 09129 Cagliari, Italy
*E-mail address*: gbande@unica.it